УДК 519.21

О.В. Іванов, І.В. Орловський

ПРО ЄДИНІСТЬ *M*-ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ НЕЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ РЕГРЕСІЇ

Вступ

Починаючи з первинних праць П. Х'юбера [1, 2] в статистиці вивчаються так звані *M*-оцінки параметрів статистичних моделей, які певним чином узагальнюють класичні оцінки максимальної вірогідності. Смисл розгляду таких оцінок полягає в тому, що *M*-оцінки є стійкими відносно аномальних спостережень (викидів), присутніх у вибірці. Цей ефект досягається за рахунок певного вибору функції втрат, за якою будується *M*-оцінка.

Асимптотичні властивості *M*-оцінок параметрів лінійних та нелінійних моделей регресії з неперервним часом та випадковим шумом, що задовольняє умову сильної залежності, було досліджено в працях [3—5] для моделей з неперервним часом.

У статтях [6, 5] розглядались асимптотичні властивості *M*-оцінок параметрів нелінійних моделей регресії з неперервним часом та слабкозалежним випадковим шумом.

Обрана тематика є важливою частиною в дослідженнях асимптотичних властивостей *M*-оцінок. При дослідженні асимптотичної нормальності цих оцінок важливою частиною доведення є використання теореми Брауера про нерухому точку [7]. Даний підхід бере свій початок із класичних праць Х'юбера [2]. Але головною вимогою застосування цієї теореми є єдиність розв'язку системи рівнянь, яка визначає *M*-оцінку. Для нелінійних моделей регресії з дискретним часом та незалежними однаково розподіленими похибками спостережень питання єдиності *M*-оцінок розглядалось у статті [8].

Постановка задачі

Метою даної статті є отримання умов, за яких *M*-оцінка невідомого параметра в нелінійній регресійній моделі з неперервним часом та сильно- або слабкозалежним випадковим шумом є єдиним, в певному асимптотичному розумінні, розв'язком системи нормальних рівнянь, які її визначають. У статті досліджено *M*-оцінки, які побудовано за допомогою гладких функцій втрат. Останні, як і їх недиференційовні аналоги, широко використовуються в розв'язанні задач обробки статистичних даних.

Попередні позначення

Розглянемо модель регресії

$$X(t) = g(y(t), \theta) + \varepsilon(t), t \ge 0, \qquad (1)$$

де $g(y,\tau)$ — дійсна неперервна за сукупністю змінних $(y,\tau) \in Y \times \Theta^c$ функція; $Y \subset R^m$ — компактна область планування регресійного експерименту (1); $\Theta \subset R^q$ — відкрита обмежена множина параметрів, яка містить θ; Θ^c — замикання в R^q множини Θ. Детерміновану борелівську функцію $y(\cdot): R_+ \to Y$, $R_+ = [0,\infty)$, будемо називати планом регресійного експерименту. Відносно випадкового процесу $\varepsilon(t)$ припустимо, що:

1) $\varepsilon(t), t \in R^1$ є дійсним неперервним у середньоквадратичному вимірним стаціонарним гауссівським процесом із нульовим середнім, який визначено на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, P)$.

Для оцінювання невідомого параметра $\theta \in \Theta$ будемо використовувати *M*-оцінки.

***Означення* 1.** *M*-оцінкою невідомого параметра $\theta \in \Theta$, одержаною за спостереженнями $X(t), t \in [0,T]$, виду (1) та неперервною функцією втрат $\rho(x), x \in R^1$, називається будь-який випадковий вектор $\hat\theta_T = \hat\theta_T(X(t), t \in [0,T]) \in \Theta^c$, для якого

$$Q_T(\hat\theta_T) = \inf_{\tau \in \Theta^c} Q_T(\tau),$$

$$Q_T(\tau) = \int_0^T \rho(X(t) - g(y(t),\tau))dt.$$

Якщо функція регресії та функція втрат є диференційовними, то *M*-оцінка $\hat\theta_T$ задовольняє систему рівнянь

$$\nabla Q_T(\tau) = 0, \qquad (2)$$

де $\nabla Q_T(\tau)$ — градієнт функції $Q_T(\tau)$.

При дослідженні асимптотичних властивостей *M*-оцінок, таких, як асимптотична нормальність, виникає потреба в єдиності розв'язку системи (2), що визначає M-оцінку, в певному асимптотичному розумінні. Це пов'язано з тим, що важливою частиною доведень таких властивостей є застосування теореми Брауера про нерухому точку [7]. У статті виводяться достатні умови єдиності розв'язку цієї системи.

Асимптотична єдиність M-оцінки за ймовірністю

Припустимо, що $g(y,\tau)$ – двічі неперервно диференційовна по $\tau \in \Theta^c$ функція. Введемо позначення:

$$g_i(y,\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau_i} g(y,\tau),$$

$$g_{il}(y,\tau) = \frac{\partial^2}{\partial \tau_i \partial \tau_l} g(y,\tau),$$

$$i,l = 1,...,q;$$

$$J_T(\theta) = (J_T^{il}(\theta))_{i,j=1}^q = \left(\frac{1}{T} \int_0^T g_i(y(t),\theta) g_l(y(t),\theta) dt \right)_{i,j=1}^q;$$

$\lambda_{\min}(A)$ – найменше власне число симетричної матриці А;

$$\Phi_T^{il}(\tau_1,\tau_2) = \int_0^T \left(g_{il}(y(t),\tau_1) - g_{il}(y(t),\tau_2) \right)^2 dt,$$

$$i,l = 1,\ldots,q,\ \tau_1,\tau_2 \in \Theta^c.$$

Буквами k з верхніми або нижніми індексами позначатимемо додатні константи. Введемо умови:

2) функції $g_i(y,\tau), g_{il}(y,\tau), i,l = 1,\ldots,q,$ є обмеженими функціями:

$$\sup_{y\in Y} \sup_{\tau\in\Theta^c} |g_i(y,\tau)| \le k^i < \infty,$$

$$\sup_{y\in Y} \sup_{\tau\in\Theta^c} |g_{il}(y,\tau)| \le k^{il} < \infty;$$

3) $\lambda_{\min}(J_T(\theta)) \ge \lambda_* > 0$ при достатньо великих T (при $T > T_0$);

4) $\frac{1}{T}\Phi_T^{il}(\tau_1,\tau_2) \le k_{il}\|\tau_1 - \tau_2\|^2,\ i,l = 1,\ldots,q,$ $\tau_1, \tau_2 \in \Theta^c$ при $T > T_0$.

***Означення* 2.** Вимірна функція $L(\cdot): R_+ \to R_+$ називається повільно змінною (п.з.ф.) (на нескінченності), якщо для довільного $\lambda > 0$ виконується умова

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(\lambda t)}{L(t)} = 1.$$

Накладемо на випадковий процес $\varepsilon(t)$ умову:

5) випадковий процес $\varepsilon(t), t \in R^1$, має кореляційну функцію $B(t) = E\varepsilon(0)\varepsilon(t)$, $B(0) = 1$, що задовольняє одну з умов:

(i) $B(\cdot) \in L_1(R^1)$ і $B = \int_{-\infty}^{\infty} |B(t)|\, dt$;

(ii) $B(t) = \frac{L(|t|)}{|t|^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, де $L(t)$ – п.з.ф.;

6) функція $\rho(x)$, $x \in R^1$ є двічі неперервно диференційовною, а її похідні $\rho'(x) = \psi(x)$ та $\rho''(x) = \psi'(x)$ мають такі властивості:

(i) $\sup_{x\in R} |\psi(x)| = k_\psi < \infty$, $\sup_{x\in R} |\psi'(x)| = k_{\psi'} < \infty$;

(ii) $E\psi(\varepsilon(0)) = 0$;

(iii) $E\psi'(\varepsilon(0)) \ne 0$;

(iv) для довільних $x,h \in R^1$ та деякої константи $\kappa < \infty$

$$|\psi'(x+h) - \psi'(x)| \le \kappa |h|.$$

Відносно M-оцінки припустимо, що:

7) $\hat\theta_T$ є слабкоконзистентною оцінкою θ, тобто для довільного $r > 0$ маємо

$$P\{\|\hat\theta_T - \theta\| > r\} \underset{T\to\infty}{\to} 0.$$

Достатні умови слабкої конзистентності M-оцінок параметрів нелінійних моделей регресії містяться в працях [9, 10].

Сформулюємо основний результат статті.

Теорема 1. Нехай виконуються умови 1)–7). Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $T_0 = T_0(\varepsilon)$, що для $T > T_0$ система рівнянь (2) має єдиний розв'язок із ймовірністю, не менше $(1-\varepsilon)$.

Доведення. Позначимо

$$H(t;\tau,\theta) = g(y(t),\tau) - g(y(t),\theta),$$

$$H_i(t;\tau,\theta) = g_i(y(t),\tau) - g_i(y(t),\theta),$$

$$H_{il}(t;\tau,\theta) = g_{il}(y(t),\tau) - g_{il}(y(t),\theta),\ i,l = 1,\dots,q,$$

$$\gamma = \frac{1}{E\psi'(\varepsilon(0))},\ G_T(\tau) = \left(G_T^{il}(\tau)\right)_{i,l=1}^{q} = \left(\gamma\frac{\partial^2 Q_T(\tau)}{\partial\tau_i\partial\tau_l}\right)_{i,l=1}^{q}.$$

Для доведення теореми необхідно показати, що гессіан $G_T(\tau)$ функціонала $\gamma Q_T(\tau)$ є додатно визначеною матрицею в деякому околі точки θ з ймовірністю, що прямує до одиниці при $T\to\infty$.

Для довільних $i,l = 1,...,q$ маємо

$$G_T^{il}(\tau) =$$

$$= \frac{\gamma}{T}\int_0^T \psi'\left(X(t) - g(y(t),\tau)\right) g_i(y(t),\tau) g_l(y(t),\tau)dt -$$

$$-\frac{\gamma}{T}\int_0^T \psi\left(X(t) - g(y(t),\tau)\right) g_{il}(y(t),\tau)dt =$$

$$= G_1^{il}(\tau) + G_2^{il}(\tau). \quad (3)$$

Розглянемо другий доданок з (3)

$$G_2^{il}(\tau) =$$

$$= -\frac{\gamma}{T}\int_0^T \left[\psi\left(\varepsilon(t) - H(t;\tau,\theta)\right) - \psi\left(\varepsilon(t)\right)\right] g_{il}(y(t),\tau)dt -$$

$$-\frac{\gamma}{T}\int_0^T \psi\left(\varepsilon(t)\right) H_{il}(t;\tau,\theta)dt - \frac{\gamma}{T}\int_0^T \psi\left(\varepsilon(t)\right) g_{il}(y(t),\theta)dt =$$

$$= G_3^{il}(\tau) + G_4^{il}(\tau) + G_5^{il}. \quad (4)$$

Завдяки умові 2) маємо

$$|H(t;\tau,\theta)| = \left|\sum_{i=1}^{q} g_i(y(t),\tau_t^*)(\tau_i - \theta_i)\right| \le \|\mathbf{k}\|\cdot\|\tau-\theta\|, \quad (5)$$

де $\mathbf{k} = (k^1,...,k^q)$. Крім того, для деякого $\delta_t \in (0;1)$ знаходимо

$$\psi(\varepsilon(t) - H(t;\tau,\theta)) - \psi(\varepsilon(t)) =$$

$$= \psi'(\varepsilon(t) - \delta_t H(t;\tau,\theta))H(t;\tau,\theta). \quad (6)$$

Тоді із врахуванням умов 6) (i) і формул (5) і (6) отримуємо

$$|G_3^{il}(\tau)| \le k_{\psi'} k^{il}\, |\gamma|\, \|\mathbf{k}\|\, \|\tau-\theta\|. \quad (7)$$

За умовою 4) маємо

$$\left|G_4^{il}(\tau)\right| \le |\gamma| \left(\frac{1}{T}\int_0^T \psi^2(\varepsilon(t))dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{T}\Phi_T^{il}(\tau,\theta)\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le |\gamma|\, k_{il}\left(|\,\zeta_T\,|^{\frac{1}{2}} + \left[E\psi^2(\varepsilon(0))\right]^{\frac{1}{2}}\right)\|\tau-\theta\|,$$

де

$$\zeta_T = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\psi^2(\varepsilon(t)) - E\psi^2(\varepsilon(0))\right)dt. \quad (8)$$

Оскільки $E\psi^4(\varepsilon(0)) < \infty$, функцію $\psi^2(x)$, $x\in R^1$, можна розкласти в гільбертовому просторі $L_2(R^1,\varphi(x)dx)$, де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, за поліномами Чебишева–Ерміта:

$$\psi^2(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k(\psi^2)}{k!}H_k(x),$$

$$C_k(\psi^2) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^2(x)H_k(x)\varphi(x)dx,$$

$$H_k(x) = (-1)^k e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^k}{dx^k}e^{-\frac{x^2}{2}},\ k = 0,1,\dots$$

Використовуючи властивість

$$EH_m(\varepsilon(t))H_k(\varepsilon(s)) = \delta_m^k k! B^k(t-s),$$

де δ_m^k – символ Кронекера, та очевидну рівність $E\psi^2(\varepsilon(0)) = C_0(\psi^2)$, отримуємо

$$\mathrm{cov}(\psi^2(\varepsilon(t)),\psi^2(\varepsilon(s))) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k^2(\psi^2)}{k!}B^k(t-s).$$

Виходячи з того, що $|B(t)|\le 1,\ t\in R^1$, маємо

$$|\mathrm{cov}(\psi^2(\varepsilon(t)),\psi^2(\varepsilon(s)))| \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k^2(\psi^2)}{k!}|B(t-s)| =$$

$$= D\psi^2(\varepsilon(0))|B(t-s)|. \quad (9)$$

Завдяки останній нерівності знаходимо

$$E\zeta_T^2 = E\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \operatorname{cov}(\psi^2(\varepsilon(t)),\psi^2(\varepsilon(s)))dtds \le$$

$$\le D\psi^2(\varepsilon(0))\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T |B(t-s)|\,dtds. \quad (10)$$

Якщо виконується умова 5)(i), то матимемо

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T |B(t-s)|dtds \le$$

$$\le \frac{1}{T^2}\int_0^T\left(\int_{-\infty}^{\infty}|B(t)|\,dt\right)ds = \frac{1}{T}B. \quad (11)$$

З (10) та (11) отримуємо

$$E\zeta_T^2 \le \frac{1}{T}BD\psi^2(\varepsilon(0)). \quad (12)$$

У разі, коли виконується умова 5) (ii), використовуючи властивості п.з.ф. (див., наприклад, [4]), знаходимо

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T B(t-s)dtds = \int_0^1\int_0^1 B\left(T(t-s)\right)dtds =$$

$$= \frac{1}{T^\alpha}\int_0^1\int_0^1 \frac{L\left(T(t-s)\right)}{|t-s|^\alpha}dtds \sim \left(\int_0^1\int_0^1\frac{dtds}{|t-s|^\alpha}\right)\frac{L(T)}{T^\alpha} =$$

$$= \frac{2}{(1-\alpha)(2-\alpha)}B(T). \quad (13)$$

В обох випадках маємо

$$|\zeta_T|^{\frac{1}{2}} = {}_1o_p(1),$$

де $o_p(1)$ з різними індексами позначатимемо невід'ємні випадкові величини (в.в.), які прямують до нуля при $T\to\infty$ за ймовірністю. Таким чином, отримаємо

$$|G_4^{il}(\tau)| \le |\gamma|\,k_{il}\left({}_1o_p(1) + \left[(E\psi^2(\varepsilon(0))\right]^{\frac{1}{2}}\right)\|\tau-\theta\|. \quad (14)$$

Аналогічно (9) знаходимо

$$|\operatorname{cov}(\psi(\varepsilon(t)),\psi(\varepsilon(s)))| \le E\psi^2(\varepsilon(0))|B(t-s)|. \quad (15)$$

З (15) випливає, що

$$E(G_5^{il})^2 \le \gamma^2(k^{il})^2 E\psi^2(\varepsilon(0))\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T |B(t-s)|\,dtds.$$

Беручи до уваги (11) та (13), отримуємо

$$|G_5^{il}| = {}_2o_p^{il}(1). \quad (16)$$

Таким чином, з (7), (14) та (16) випливає

$$|G_2^{il}(\tau)| \le \left(k_{\psi'}k^{il}\|\mathbf{k}\| + k_{il}\left({}_1o_p(1) + \left[E\psi^2(\varepsilon(0))\right]^{\frac{1}{2}}\right)\right)\times$$

$$\times|\gamma|\,\|\tau-\theta\| + {}_2o_p^{il}(1).$$

З іншого боку, матимемо

$$G_1^{il}(\tau) = \frac{\gamma}{T}\int_0^T\left[\psi'(\varepsilon(t) - H(t;\tau,\theta)) - \psi'(\varepsilon(t))\right]\times$$

$$\times g_i(y(t),\tau)g_l(y(t),\tau)dt +$$

$$+\frac{\gamma}{T}\int_0^T\psi'(\varepsilon(t))\times$$

$$\times\left[g_i(y(t),\tau)H_l(t;\tau,\theta) + g_l(y(t),\theta)H_i(t;\tau,\theta)\right]dt +$$

$$+\frac{\gamma}{T}\int_0^T\left[\psi'(\varepsilon(t)) - E\psi'(\varepsilon(t))\right]g_i(y(t),\theta)g_l(y(t),\theta)dt +$$

$$+J_T^{il}(\theta) = G_6^{il}(\tau) + G_7^{il}(\tau) + G_8^{il} + J_T^{il}(\theta).$$

За умовою 6)(iv) маємо

$$|G_6^{il}(\tau)| \le \kappa k^i k^l\,|\gamma|\,\|\mathbf{k}\|\|\tau-\theta\|.$$

Крім того, аналогічно (14) отримуємо

$$|G_7^{il}(\tau)| \le |\gamma|\left(k^i\|\mathbf{k}_l\| + k^l\|\mathbf{k}_i\|\right)\times$$

$$\times\left({}_3o_p(1) + \left[E\left(\psi'(\varepsilon(0))\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right)\|\tau-\theta\|,$$

де $\mathbf{k}_i = \left(k^{i1},\ldots,k^{iq}\right)$, $i = 1,\ldots,q$.

Нарешті, враховуючи нерівність

$$|\operatorname{cov}(\psi'(\varepsilon(t)),\psi'(\varepsilon(s)))| \le D\psi'(\varepsilon(0))\,|B(t-s)|,$$

яка виводиться аналогічно (15), маємо

$$E(G_8^{il})^2 \le \gamma^2(k^i)^2(k^l)^2 D\psi'(\varepsilon(0))\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T |B(t-s)|\,dtds,$$

звідки випливає

$$|G_8^{il}| = {}_4o_p^{il}(1).$$

З отриманих оцінок маємо

$$|G_1^{il}(\tau) - J_T^{il}(\theta)| \le |\gamma| \, \|\tau - \theta\| \times$$

$$\times \left(\kappa k^i k^l \|\mathbf{k}\| + (k^i \mathbf{k}_l + k^l \mathbf{k}_i)({}_3o_p(1) + E(\psi'(\varepsilon))^2)^{\frac{1}{2}} \right) +$$

$$+ {}_4o_p^{il}(1).$$

Спираючись на властивість власних чисел суми двох симетричних матриць (див. [11, с. 101–103]), записуємо

$$|\lambda_{\min}(G(\tau)) - \lambda_{\min}(J_T(\theta))| \le q \max_{1 \le i,l \le q} |G^{il}(\tau) - J_T^{il}(\theta)| \le$$

$$\le q \left(\max_{1 \le i,l \le q} |G_1^{il}(\tau) - J_T^{il}(\theta)| + \max_{1 \le j,l \le q} |G_2^{il}(\tau)| \right). \quad (17)$$

Нехай $r = \frac{\lambda_*}{8q}$, де λ_* – число з умови 3). Якщо відбувається подія

$$\Omega_r = \Big\{ {}_1o_p(1) \le r;\ {}_3o_p(1) \le r;$$

$$\max_{1 \le i,l \le q} \{ {}_2o_p^{il}(1),\ {}_4o_p^{il}(1) \} \le r;\ \|\widehat{\theta}_T - \theta\| \le \frac{r}{R} \Big\},$$

де $R = |\gamma| \max_{1 \le i,l \le q} \Big\{ k_{\psi'} k^{il} \|\mathbf{k}\| + k_{il} \left(r + \left[E\psi^2(\varepsilon(0)) \right]^{\frac{1}{2}} \right);$

$$\kappa k^i k^l \|\mathbf{k}\| + (k^i \mathbf{k}_l + k^l \mathbf{k}_i)(r + E(\psi'(\varepsilon))^2)^{\frac{1}{2}} \Big\},$$

то з (17) знаходимо

$$P\{\Omega_r\} \le P\left\{ \left| \lambda_{\min}(G(\widehat{\theta}_T)) - \lambda_{\min}(J_T(\theta)) \right| \le 4qr \right\} \le$$

$$\le P\left\{ \lambda_{\min}(G(\widehat{\theta}_T)) - \lambda_{\min}(J_T(\theta)) \ge -\frac{\lambda_*}{2} \right\} \le$$

$$\le P\left\{ \lambda_{\min}(G(\widehat{\theta}_T)) \ge \frac{\lambda_*}{2} \right\}$$

для $T > T_0$ згідно з умовою 3).

Результат теореми 1 випливає з умови 7). Теорема доведена.

Асимптотична єдиність *M*-оцінки майже напевно

Посилимо умову 7):

8) $\widehat{\theta}_T$ є сильноконзистентною оцінкою θ, тобто $\widehat{\theta}_T \underset{T \to \infty}{\to} \theta$ майже напевно (м.н.).

Достатні умови сильної консистентності *M*-оцінок параметрів нелінійних моделей регресії містяться в статті [5].

Тоді теорему 1 можна переформулювати в такому вигляді.

Теорема 2. Нехай виконуються умови 1)–6) і 8). Тоді для майже всіх $\omega \in \Omega$ існує таке $T_0 = T_0(\omega)$, що для $T > T_0$ система рівнянь (2) має єдиний розв'язок.

Доведення. Позначатимемо $o(1)$ в.в., які прямують до нуля при $T \to \infty$ м.н. Для доведення теореми достатньо показати, що

$$|G_2^{il}(\widehat{\theta}_T)| = o(1), \quad |G_1^{il}(\widehat{\theta}_T) - J_T^{il}(\theta)| = o(1), \quad (18)$$

де $G_1^{il}(\tau), G_2^{il}(\tau), i,l = 1,\ldots,q,$ задано у (3).

Покажемо, що перше співвідношення у формулі (18) виконується. Розглянемо (4). Очевидно, $G_3(\widehat{\theta}_T) = o(1)$ завдяки (7) та умові 8).

Для доведення $G_4(\widehat{\theta}_T) = o(1)$ необхідно показати, що в.в. ζ_T, які задано (8), є величинами $o(1)$.

Нехай виконується умова 5)(i). Тоді з (12) випливає, що для послідовності $T_n = n^2, n \in N$, $\sum_{n=1}^{\infty} E\zeta_{T_n}^2 < \infty$, і тому $\zeta_{T_n} \to 0$ м.н. при $n \to \infty$.

Якщо $T \in [T_n, T_{n+1}]$, то матимемо

$$\zeta_T \le \sup_{T_n < T \le T_{n+1}} |\zeta_T - \zeta_{T_n}| + |\zeta_{T_n}|.$$

Доведемо, що

$$\sup_{T_n < T \le T_{n+1}} |\zeta_T - \zeta_{T_n}| \to 0 \text{ м.н.}$$

Очевидно, що

$$\zeta_T - \zeta_{T_n} = \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_n} \right) \int_0^{T_n} (\psi^2(\varepsilon(t)) - E\psi^2(\varepsilon(0)))dt +$$

$$+ \frac{1}{T} \int_{T_n}^{T} (\psi^2(\varepsilon(t)) - E\psi^2(\varepsilon(0)))dt = I_1 + I_2. \quad (19)$$

Для $T \in (T_n, T_{n+1}]$ маємо

$$| I_1 | \le \frac{T_{n+1} - T_n}{T_n} | \zeta_{T_n} | \to 0 \text{ м.н.}$$

Розглянемо I_2. Для $T \in [T_n, T_{n+1}]$ виконується нерівність

$$| I_2 | \le \frac{1}{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \left| \psi^2(\varepsilon(t)) - E\psi^2(\varepsilon(0)) \right| dt \le$$

$$\le \frac{1}{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \psi^2(\varepsilon(t)) dt + \frac{T_{n+1} - T_n}{T_n} E\psi^2(\varepsilon(0)) =$$

$$= \frac{T_{n+1}}{T_n} \zeta_{T_{n+1}} - \zeta_{T_n} + \frac{T_{n+1} - T_n}{T_n} E\psi^2(\varepsilon(0)) \to 0 \text{ м.н.}$$

Таким чином, маємо $\zeta_T = o(1)$.

У разі виконання умови 5) (ii) з (13) випливає, що для послідовності $T_n = n^{\frac{1}{\alpha} + \nu}$, $n \in N$, де $\nu > 0$ – деяке число, має місце збіжність $\zeta_{T_n} \to 0$ м.н. при $n \to \infty$, оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(T_n)}{T_n^{\alpha}} < \infty$. Далі, доведення збіжності $\zeta_T \to 0$ м.н. аналогічно доведенню попереднього випадку.

Доведення того, що $G_5^{il} = o(1)$, аналогічно доведенню для ζ_T. Зазначимо лише, що вираз, подібний I_2 з (19), оцінюється так:

$$\frac{|\gamma|}{T} \left| \int_{T_n}^{T} \psi(\varepsilon(t)) g_{il}(y(t), \theta) dt \right| \le \frac{k^{il} |\gamma|}{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} | \psi(\varepsilon(t)) | dt \le$$

$$\le k^{il} | \gamma | \sqrt{\frac{T_{n+1} - T_n}{T_n}} \sqrt{\frac{1}{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \psi^2(\varepsilon(t)) dt} \to 0 \text{ м.н.}$$

при $n \to \infty$.

З аналогічних міркувань випливає, що $G_6^{il}(\widehat{\theta}_T) = o(1), G_7^{il}(\widehat{\theta}_T) = o(1)$ і $G_8^{il} = o(1)$. Таким чином, (18) виконано. Теорема доведена.

Висновки

Отримання достатніх умов єдиності розв'язку системи нормальних рівнянь, що визначають *M*-оцінку параметра нелінійної моделі регресії, надає можливість зробити наступний крок у вивченні асимптотичних властивостей *M*-оцінок, а саме довести асимптотичну нормальність цієї оцінки за різних припущень щодо характеру залежності випадкового шуму.

А.В. Иванов, И.В. Орловский

ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ *M*-ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ РЕГРЕССИИ

Получены условия, при которых *M*-оценка неизвестного параметра в нелинейной регрессионной модели с непрерывным временем и сильно- или слабозависимым случайным шумом является единственным (в определенном асимптотическом смысле) решением системы нормальных уравнений, которые ее определяют.

O.V. Ivanov, I.V. Orlovsky

ON THE UNIQUE *M*-ESTIMATES OF NONLINEAR REGRESSION MODEL PARAMETERS

Through experiments conducted, we uncover the conditions, under which *M*-estimate of the model parameter in the nonlinear regression model with continuous time and strong/weak dependent random noise is a unique solution of the system (in a definite asymptotic sense).

1. *Huber P.J.* Robust regression: asymptotics, conjectures and Monte-Carlo // Ann. Statist. – 1973. – **1**, N 5. – P. 799–821.
2. *Хьюбер П.* Робастность в статистике. – М.: Мир, 1984. – 304 с.
3. *Ivanov A.V., Leonenko N.N.* Asymptotic behavior of *M*-estimators in continuous-time non-linear regression with long-range dependent errors // Random Oper. and Stoch. Equ. – 2002. – **10**, N 3. – P. 201–222.

4. *Ivanov A.V., Orlovsky I.V.* L_p-estimates in nonlinear regression with long-range dependence // Theory of Stochastic Processes. – 2001. – **7(23)**, N 3-4. – P. 38–49.
5. *Іванов О.В., Орловський І.В.* Конзистентність *M*-оцінок у нелінійних моделях регресії з неперервним часом // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2005. – № 4. – С. 140–147.
6. *Orlovsky I.V.* *M*-estimates in nonlinear regression with weak dependence // Theory of Stochastic Processes. – 2003. – **9(25)**, N 1-2. – P. 108–122.
7. *Гончаренко Ю.В., Ляшко С.И.* Теорема Брауэра. – К.: КИЙ, 2000. – 48 с.
8. *Іванов О.В., Орловський І.В.* Асимптотична нормальність *M*-оцінок у класичній нелінійній моделі регресії // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, вип. 11. – С. 1470–1488.
9. *Liese F., Vajda I.* Consistency of *M*-estimates in general regression models // J. Multiv. Analysis. – 1994. – **50**, N 1. – P. 93–114.
10. *Ivanov A.V.* Asymptotic Theory of nonlinear regression. – Dordrecht: Kluwer Academic Press, 1997. – 327 p.
11. *Wilkinson J.H.* The algebraic eigen value problem. – Oxford: Clarendon Press, 1962. – 662 p.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
25 березня 2009 року